

ALGEBRE LINEAIRE I

Centre Universitaire de Banfora (CUB)

Filière MPCl

Année Universitaire 2019-2020

Enseignant :

Kassiéno LAMIEN

Docteur en Mathématiques Appliquées

Maître Assistant à l'Institut Des Sciences (IDS)

Table des matières

1	Espaces vectoriels	3
1.1	Espaces vectoriels-Sous espaces vectoriels	3
1.1.1	Espaces vectoriels	3
1.1.2	Sous espaces vectoriels	4
1.1.3	Sous espace vectoriel engendré	5
1.1.4	Intersection, union et somme de sous-espaces vectoriels	6
1.2	Bases d'un espace vectoriel	7
1.2.1	Famille libre de vecteurs	7
1.2.2	Famille génératrice	8
1.2.3	Bases d'un espace vectoriel	9
1.3	Rang d'une famille de vecteurs	10
2	NOTION DE MATRICES	12
2.1	Définitions et notations	12
2.1.1	Matrices particulières	13
2.1.2	Transposée d'une matrice	15
2.1.3	Trace d'une matrice	15
2.1.4	Egalité de deux matrices	15
2.1.5	Rang d'une matrice	16
2.2	L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}$	16
2.2.1	Addition dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$	16
2.2.2	Multiplication d'une matrice par un scalaire	17
2.3	Produit de deux matrices	18
2.3.1	Définition et exemples	18
2.3.2	L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	19
2.4	Déterminant d'une matrice carrée	22
2.4.1	Définitions	22
2.4.2	Cas des matrices carrées d'ordre $n \leq 3$	24
2.4.3	Cas général : Développement suivant une ligne ou une colonne	25
2.4.4	Propriétés des déterminants	26

TABLE DES MATIÈRES

2.5	Déterminant et inverse d'une matrice carrée	26
2.5.1	Méthode des cofacteurs	26
2.6	Systèmes d'équations linéaires	27
2.6.1	Définitions	27
2.6.2	Cas d'un système de Cramer : Méthode des cofacteurs	28
2.6.3	Cas général : méthode du pivot de Gauss	28
3	Applications linéaires	30
3.1	Définitions et propriétés	30
3.1.1	Définitions	30
3.1.2	Propriétés	31
3.1.3	Image directe d'un s.e.v et image indirecte d'un s.e.v	31
3.1.4	Dual d'un espace vectoriel	32
3.2	Application linéaire en dimension finie	32
3.2.1	Matrice d'une application linéaire	32
3.2.2	Changement de bases	34

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{k}$ désigne un corps commutatif.

1.1 Espaces vectoriels-Sous espaces vectoriels

1.1.1 Espaces vectoriels

Définition. Soit E un ensemble non vide, "+" une loi de composition interne de E et "." une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{k}$, (c'est-à-dire une application de $\mathbb{k} \times E$ dans $E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ ou que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel si :

(ev1) : $(E, +)$ est un groupe abélien, et $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$,

$$(ev2) : \begin{cases} (i) (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x), \\ (ii) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y, \\ (iii) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \\ (iv) 1_{\mathbb{k}} \cdot x = x. \end{cases}$$

Exemple. 1- Pour $E = \mathbb{R}_2[X]$, qui est l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2 ; "+" l'addition des polynômes et "." la multiplication des polynômes par un réel, alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. (Vérification)

2- l'ensemble des vecteurs du plan (c'est à dire que $E = \mathbb{R}^2$) ou de l'espace (c'est à dire $E = \mathbb{R}^3$) est un $\mathbb{R}$. e. v,

3- Si $\mathbb{k}$ est un corps commutatif, alors $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$. e. v,

4- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel mais aussi un $\mathbb{R}$. e. v,

5- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ e. v, et plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$.e.v, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- 6- L'ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F est un espace vectoriel,
- 7- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$. e. v,
- 8- Le produit cartésien d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$. e. v

Remarque. Si E est un $\mathbb{K}$. e. v alors les éléments de E sont appelés "vecteurs" et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés "scalaires". La loi de composition interne est appelée addition de vecteurs et son élément neutre est appelé "vecteur nul" et noté 0_E . La loi de composition externe est appelée multiplication d'un vecteur par un scalaire (le scalaire est toujours à gauche).

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E,$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot x = 0_E \implies \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E.$

Par la suite on omettra volontairement le signe $(\cdot)$ entre un scalaire et un vecteur multiplié.

1.1.2 Sous espaces vectoriels

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$. e. v et H une partie non vide de E . On dit que H est un sous espace vectoriel (s. e. v) de E si muni des lois de E , $(H, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$. e. v.

Exemple. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$. e. v et $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$. e. v ; donc $\mathbb{R}$ est un s. e. v de $\mathbb{C}$.

Remarque. Si H est un s. e. v de E alors H contient nécessairement le vecteur nul 0_E de E . Pour montrer que H est non vide, on vérifie généralement que $0_E \in H$.

Théorème. de caractérisation

Soit E un $\mathbb{K}$. e. v, les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

- (p1) H est un s. e. v de E ,
- (p2) (i) $H \neq \emptyset$; (ii) $\forall (x, y) \in H^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha x + \beta y \in H$ (on dit que H est stable par combinaison linéaire).
- (p3) (j) $H \neq \emptyset$; (jj) $\forall (x, y) \in H^2, x + y \in H$ (on dit que H est stable pour l'addition des vecteurs) ; (jjj) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in H, \alpha x \in H$ (on dit que H est stable pour la loi externe).
- (p4) (k) $H \neq \emptyset$; (kk) $\forall (x, y) \in H^2, \forall \beta \in \mathbb{K}, x + \beta y \in H$.

- Démonstration (en exercice)

Montrer que $(p1) \implies (p2) \implies (p3) \implies (p4) \implies (p1)$.

- Conséquence :

Pour montrer qu'un ensemble $(H, +, \cdot)$ est un s.e.v, il suffit de montrer qu'il vérifie une des propriétés de $(p1)$ à $(p4)$.

Exercice d'application. On considère le $\mathbb{R}$. e. v, $E = \mathbb{R}^3$ et $H \subset \mathbb{R}$, tel que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}$.
Montrer que H est un s. e. v de E .

1.1.3 Sous espace vectoriel engendré

Dans toute cette sous section $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

1.1.3.1- Sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille des vecteurs de E . Pour tout scalaire $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le vecteur $w = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, \dots$ et de x_n . Dans cette combinaison linéaire les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelés les coefficients.

Théorème. Pour toute famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E , l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On le note $Vect(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Démonstration : (exercice)

Vérifier que si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E , alors $Vect(x_1, x_2, \dots, x_n)$ défini ci-dessus est s.e.v de E .

Exercice d'application. On considère le $\mathbb{R}$. e. v, $E = \mathbb{R}^3$ et $H \subset \mathbb{R}$, tel que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}$.
Montrer d'une autre manière que H est un s. e. v de E .

1.1.3.2- Sous espace vectoriel engendré par une partie

Définition. Soit A une partie non vide d E et $x \in E$.

L'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant A est un sous-espace vectoriel de E contenant A . On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A . On le notera $Vect(A)$.

Remarque. (R1) $\text{Vect}(A)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A .

(R2) Si $A \neq \emptyset$ alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A . C'est à dire que $\forall x \in \text{Vect}(A)$, il existe une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de A tel que :

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i ; \alpha_i \in \mathbb{k}, x_i \in A.$$

(R3) Si $A = \emptyset$, alors $\text{Vect}(A) = 0_E$.

1.1.4 Intersection, union et somme de sous-espaces vectoriels

Théorème. Soient E un $\mathbb{k}$. e. v, H et H' deux s. e. v de E . Alors $H \cap H'$ est un s. e. v de E .

Démonstration. Comme H et H' sont deux s. e. v de E alors $0_E \in H$ et $0_E \in H'$. Donc $0_E \in H \cap H'$, d'où $H \cap H' \neq \emptyset$.

Soient $(x, y) \in (H \cap H')^2$ et $\alpha \in \mathbb{k}$. Comme H et H' sont deux s. e. v de E alors $x + \alpha \cdot y \in H$ et $x + \alpha \cdot y \in H'$. Donc $x + \alpha \cdot y \in H \cap H'$, et par suite $H \cap H'$ est un s. e. v de E . $\square$

Remarque. La réunion de s. e. v n'est pas en général un s. e. v. Cependant, si H et H' sont des s.e.v d'un même espace vectoriel E avec $H \subseteq H'$ ou $H' \subseteq H$, alors $H \cup H'$ est un espace vectoriel

Définition. Soient E un $\mathbb{k}$. e. v ; H_1 et H_2 deux s. e. v d'un $\mathbb{k}$. e. v E . On appelle somme de H_1 et de H_2 et on note $H_1 + H_2$, l'ensemble des vecteurs x de E de la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$.

Ainsi, $H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 ; x_1 \in H_1 \text{ et } x_2 \in H_2\}$.

Si de plus $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$ alors la somme de H_1 et de H_2 est appelée somme directe de H_1 et de H_2 et notée $H_1 \oplus H_2$.

On dit que H_1 et H_2 sont supplémentaires si $E = H_1 \oplus H_2$.

De même, on définit la somme des sous-espaces vectoriels d'une famille $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ par :

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{1 \leq i \leq n} F_i = \left\{ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \text{ avec } x_i \in F_i \right\}$$

Si $F_j \cap \left(\sum_{1 \leq i \leq n, i \neq j} F_i \right) = \{0_E\}$, alors la somme est dite directe et on note : $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} F_i$

Proposition. Soient H_1 et H_2 deux s. e. v d'un $\mathbb{K}$. e. v E . Alors la somme de H_1 et de H_2 est directe si, et seulement, si tout élément de $H_1 + H_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$.

Exercice d'application. Soient $H_1 = \{(a + b, a, b) ; a, b \in \mathbb{R}\}$ et $H_2 = \{(c, c, c) ; c \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H_1 \oplus H_2$.

1.2 Bases d'un espace vectoriel

1.2.1 Famille libre de vecteurs

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$. e. v et A une partie non vide de E . On dit que A est une famille libre ou linéairement indépendante si, toute combinaison linéaire nulle d'éléments de A entraîne que tous les coefficients sont nuls ; c-à-d : $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \implies \alpha_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Une famille qui n'est pas libre est dite liée ou linéairement dépendante.

Exemple. $u = (1, 0, 1) ; v = (1, -1, 0) ; w = (0, 1, 1)$. On considère les familles $A = \{u, v\}$ et $B = \{u, v, w\}$.

Déterminons si ces familles sont libres ou liées

Soit α et β tel que : $\alpha u + \beta v = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v = 0 &\implies \alpha (1, 0, 1) + \beta (1, -1, 0) = (0, 0, 0) \\ &\implies (\alpha + \beta, -\beta, \alpha) = (0, 0, 0) \\ &\implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \\ &\implies \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

d'où la famille A est libre.

Soit α, β et γ tel que : $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\implies \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \\
&\implies (\alpha + \beta, -\beta + \gamma, \alpha + \gamma) = (0, 0, 0) \\
&\implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \\
&\implies -\alpha = \gamma = \beta
\end{aligned}$$

d'où la famille B est liée. En effet, pour $\alpha = -1; \gamma = 1$ et $\beta = 1$, nous avons $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ sans que α, β et γ ne soit tous nuls.

Comme B est une famille liée, alors il existe un lien entre ses vecteurs. D'après ce qui précède,

$$-u + v + w = 0 \implies u = v + w.$$

Remarque. – Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille liée est liée.

1.2.2 Famille génératrice

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$. e. v et A une partie non vide de E . On dit que A est une famille génératrice de E , si $\text{vect}(A) = E$.

Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de A .

Exemple. Considérons $E = \mathbb{R}^3$ et $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une famille de vecteurs de E avec $u_1 = (1, 0, 1); u_2 = (1, -1, 0); u_3 = (0, 1, 1); u_4 = (1, 0, 0)$.

Les familles $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ et $B = \{u_1, u_2, u_4\}$ sont-elles génératrices de $E = \mathbb{R}^3$?

- La famille A est génératrice si pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$.

Supposons que c'est le cas, c'est à dire que :

$$(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \iff (x, y, z) = (\alpha + \beta, -\beta + \gamma, \alpha + \gamma) \iff \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\beta + \gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{cases}$$

On constate que si α, β et γ existent, alors $x + y - z = 0$. Ce qui ne sera pas toujours vrai $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; d'où la famille A n'est pas génératrice.

1.2. BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

Par exemple, pour $(1, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$, ils n'existent pas de α , β et γ pour que $(1, 1, 3) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$.

- La famille B est génératrice si pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il existe α , β , $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_4$.

Supposons que c'est le cas, c'est à dire que :

$$(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_4 \iff (x, y, z) = (\alpha + \beta + \gamma, -\beta, \alpha) \iff \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = -\beta \\ z = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = x + y - z \\ \beta = -y \\ \alpha = z \end{cases}$$

Ainsi, pour tout (x, y, z) , on pourra calculer α , β , $\gamma \in \mathbb{R}$. D'où la famille B est génératrice de $E = \mathbb{R}^3$.

- Remarque.**
- Toute sous-famille d'une famille non génératrice est non génératrice.
 - Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

1.2.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$. e. v et A une partie non vide de E . On dit que A est une base de E si A est une famille libre et génératrice.

Si E admet une base à n vecteurs alors toutes les bases de E ont n vecteurs. Dans ce cas, on dit que E est un e. v de dimension n et on note $\dim(E) = n$.

- Remarque.**
- Si E est un e. v de dimension n alors toute famille de ayant plus de n vecteurs est liée.

Définition. On dit qu'un e. v E est de dimension finie si E admet une base finie ; c-à-d une base à n vecteurs avec n un entier naturel fini. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors pour tout vecteur x de E , il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Le n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé composante ou coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. - Le plan $\mathbb{R}^2$ a pour base la famille $B = (\vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}(1, 0)$ et $\vec{j}(0, 1)$. Tous les autres vecteurs $\vec{u}(a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'écrivent sous la forme $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
Vu au collège.

1.3. RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

- L'espace $\mathbb{R}^3$ a pour base la famille $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i}(1, 0, 0)$, $\vec{j}(0, 1, 0)$ et $\vec{k}(0, 0, 1)$. Tous les autres vecteurs $\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrivent sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Vu au lycée

Exercice d'application. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1, 0, 1)$; $e_2 = (1, -1, 0)$; $e_3 = (1, 0, 0)$. Déterminer les coordonnées de $u = (1, -1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. – Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées dans une même base.

- $\mathbb{R}^n$ est un e.v de dimension n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Si E_1 et E_2 sont des s. e. v supplémentaires d'un e. v E alors $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$. et toute base $\mathcal{B}$ de E est de la forme $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, où $\mathcal{B}_1$ est une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2 .
- Toute famille de n vecteurs libres ou génératrices dans un e. v de dimension n est une base.

Définition. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie. Tout s.e.v F de E est de dimension finie et on a $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Théorème. Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie. Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Proposition. Soient E et F deux e.v de dimensions finies. Alors :

$E + F$ est un e.v et $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.

$E \times F$ est un e.v et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Exercice d'application. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 2)$, $e_3 = (-1, 1, 0)$, $u_1 = (1, -1, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 2)$ et $u_3 = (-2, 3, 2)$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soient E un espace vectoriel et F une famille finie d'éléments de E . On appelle rang de F et on le note $\text{rg}(F)$, la dimension du s. e. v engendré par F .

1.3. RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

C'est à dire que :

$$rg(F) = \dim(\text{vect}(F)).$$

Proposition. Soient E un espace vectoriel et F une famille finie d'éléments de E .

- 1- Le rang de F est le plus grand cardinal des sous-familles libres de F .
- 2- F est libre si et seulement si : $rg(F) = \text{card}(F)$ où $\text{card}(F)$ est le nombre de vecteurs de F .

Proposition. Pour toutes familles finies F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E , on a :

- 1- $F_1 \subseteq F_2 \implies rg(F_1) \leq rg(F_2)$.
- 2- $\text{Max}(rg(F_1); rg(F_2)) \leq rg(F_1 \cup F_2) \leq rg(F_1) + rg(F_2)$.

Définition. Soit $F = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. On appelle opérations élémentaires sur les vecteurs de F l'une des opérations suivantes :

- Echange entre eux de deux vecteurs de F .
- Remplacement d'un vecteur u_i par αu_i où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
- Remplacement d'un vecteur u_i par $u_i + \alpha u_j$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $i \neq j$.

Proposition. Les opérations élémentaires sur les vecteurs de F ne changent pas le rang de F .

Exercice d'application. Déterminer le rang des familles de vecteurs F et H suivantes :

$F = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ avec :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$H = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ avec :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

NOTION DE MATRICES

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif
(par exemple : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2.1 Définitions et notations

Définition. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice de format (n, p) ou $(n \times p)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau comportant np scalaires disposés en n lignes et p colonnes.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, notons a_{ij} l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice A .

A est alors définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1(p-1)} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2(p-1)} & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i(p-1)} & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)j} & \dots & a_{(n-1)(p-1)} & a_{(n-1)p} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n(p-1)} & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi que : $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou tout simplement $\mathcal{M}_{n,p}$.

Exemple.

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 61 & -7 & 9 & -4 & 4 \\ -2/3 & 11 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

est une matrice de format $(3, 5)$ ou (3×5) c'est à dire une matrice de 3 lignes ($n = 3$) et de 5 colonnes ($p = 5$).

2.1.1 Matrices particulières

1- On appelle matrice colonne toute matrice de dimension $(n, 1)$ ou tout vecteur colonne .

Exemple.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ pour } n = 4.$$

Pour tout j fixé,

$$A1 = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{ij} \\ \dots \\ a_{(n-1)j} \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ est la } j^{\text{ème}} \text{ matrice colonne de } A.$$

2- On appelle matrice ligne toute matrice de dimension $(1, p)$ ou tout vecteur ligne.

Exemple.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } p = 5.$$

Pour tout i fixé,

$$A2 = (a_{ij})_{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i(p-1)} & a_{ip} \end{pmatrix}$$

est la $i^{\text{ème}}$ matrice ligne de A .

3- On appelle matrice carrée toute matrice de format (n, p) avec $n = p$. On dit alors que A est une matrice carrée d'ordre n . L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Exemple. $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 61 & -7 & 9 \\ -2/3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×3 , D est donc une matrice carrée d'ordre 3.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n .

Les éléments a_{ii} , $1 \leq i \leq n$ sont appelés éléments diagonaux de A et le vecteur $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelé diagonale de A .

On dit que A est une matrice diagonale si tous ses éléments non diagonaux sont tous nuls.

Exemple. $E = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

- 4- On appelle matrice triangulaire supérieure toute matrice dont les éléments qui sont en dessous de la diagonale sont nuls.

Exemple. $E = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

- 5- On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice dont les éléments qui sont au dessus de la diagonale sont nuls.

Exemple. $E = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & 0 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

- 6- On appelle matrice identité d'ordre n ou matrice unité d'ordre n notée I_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 et ceux non diagonaux sont tous nuls.

I_n est définie par :

$$I_n = (\delta_{ij}) \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{est le symbole de Kronecker}$$

(Allemand de 1823-1891). C'est à dire que

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

7- La matrice nulle de format (m, n) est la matrice de format (m, n) dont tous ses coefficients sont nuls. On la note $0_{m,n}$.

Exemple. $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle de dimension 2×3 .

2.1.2 Transposée d'une matrice

Définition. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (n, p) .

On appelle transposée de A l'unique matrice de format (p, n) notée A^t dont les lignes sont les colonnes de A et les colonnes sont les lignes de A .

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 11 \\ -21 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -1/2 \end{pmatrix}$ donc $A^t = \begin{pmatrix} 9 & -21 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -1/2 \end{pmatrix}$

Ainsi pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$, $A^t = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p; 1 \leq i \leq n}$.

Proposition. Soient A et B des matrices.

1- $(A + B)^t = A^t + B^t$

2- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ où $\alpha \in \mathbb{K}$

3- $(A^t)^t = A$

4- $(A.B)^t = B^t.A^t$

2.1.3 Trace d'une matrice

Définition. Soit A une matrice de format (n, m) . On appelle trace de A et on note

$Tr(A)$ le nombre réel défini par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} a_{ii}.$

Proposition. $Tr(\alpha A + \beta B) = \alpha Tr(A) + \beta Tr(B).$

$Tr(A^T) = Tr(A)$ et $Tr(A^*) = \overline{Tr(A)}$

Exemple. Déterminer $Tr(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 1,3 & 5 \\ 0 & \sqrt{7} & -3 \end{pmatrix}.$

2.1.4 Egalité de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq t; 1 \leq j \leq s}$ deux matrices. Elles sont égales si, et seulement si, elles ont la même dimension (c'est à dire que $t = n$ et $s = p$) et

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

2.1.5 Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (n, p) et S la famille de vecteurs formée par les vecteurs colonnes de A .

Définition. On appelle *rang* de A , la dimension du s. e. v engendré par S .
On le note $rg(A)$.

$$rg(A) = \dim(\text{vect}(S)).$$

Remarque. Le rang de A est aussi le rang du système formé par les vecteurs lignes de A .

Définition. On appelle *opérations élémentaires sur les colonnes* d'une matrice A , l'une des transformations suivantes où C_j désigne la $j^{\text{ième}}$ colonne de A .

- Echange (entre elles) de deux colonnes de A .
- Remplacement d'une colonne C_j de A par αC_j , avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
- Remplacement d'une colonne C_j de A par $C_j + \alpha C_k$, avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $j \neq k$.

On définit de façon analogue les opérations élémentaires sur les lignes de A .

Proposition. Les opérations élémentaires sur les colonnes ou sur les lignes de A ne changent pas le rang de A .

Exercice d'application. Déterminons le rang des matrices M et N suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}$

En rappel, $\mathcal{M}_{m,n}$ désigne l'ensemble des matrices de format (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2.2.1 Addition dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$

Définition. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ deux matrices de même format (m, n) . La somme de A et B est la matrice notée $A + B$ et définie par : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$.

Exemple. Calcule

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 61 & -7 & 9 \\ -2/3 & 11 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -2 & 11 \\ -21 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 4 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque. On ne peut pas additionner deux matrices de formats différents.

Proposition. Soient A , B et C des matrices de dimension (m, n) . On a :

- ★ $A + B = B + A$ (l'addition dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$ est commutatives)
- ★ $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ (l'addition dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$ est associative)
- ★ $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$ ($0_{m,n}$ est l'élément neutre de l'addition dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$)
- ★ Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$; soit $A' = (a'_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ avec $a'_{ij} = -a_{ij}$. Alors $A + A' = 0_{m,n}$ (A' est l'opposé (le symétrique) de A dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}$).

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 61 & -7 & 9 \\ -2/3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A' = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -5 \\ -61 & 7 & - \\ 2/3 & -11 & 0 \end{pmatrix}$
Vérifier que $A + A' = 0_{3,3}$

Remarque. $(\mathcal{M}_{m,n}, +)$ est un groupe abélien.

2.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ une matrice et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On définit $\alpha.A$ par $\alpha.A = (\alpha.a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$.

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 11 \\ -21 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -1/2 \end{pmatrix}$ Calculer $-3A$.

Proposition. Soient A et B deux matrices de format (m, n) et α, β deux scalaires. On a :

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $1 \times A = A$ et $0 \times A = 0_{m,n}$.

Théorème. L'ensemble des matrices de dimension (m, n) , muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) ; +, \cdot)$ est un e. v sur $\mathbb{K}$ de dimension $m \times n$.

Exercice d'application.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$

ainsi que la famille $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ où

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & e_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & e_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & e_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & e_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\ & & e_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et} \end{aligned}$$

Vérifier que $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) = \text{vect}(B)$.

2.3 Produit de deux matrices

2.3.1 Définition et exemples

Définitions

Définition. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ une matrice de format (m, n) et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (n, p) . On définit le produit $A.B$ par $C = A.B = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Par conséquent, le produit de la matrice A par la matrice B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et le produit matriciel n'est donc pas commutatif; c-à-d $A.B$ n'est pas nécessairement égal à $B.A$.

Exemple.

1- Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-4) \times 4 + 5 \times (-2) & 1 \times 3 + (-4) \times 2 + 5 \times 3 & 1 \times 5 + (-4) \times 0 + 5 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times 4 + 0 \times (-2) & 1 \times 3 + 2 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 5 + 2 \times 0 + 0 \times 3 \\ 2 \times 2 + 0 \times 4 + 3 \times (-2) & 2 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 3 & 2 \times 5 + 0 \times 0 + 3 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -24 & 10 & 20 \\ 10 & 7 & 5 \\ -2 & 15 & 19 \end{pmatrix}$$

2- Calculer $B.A$ et comparer à AB .

3- Calculer $C.A$ et $A.C$ et conclure.

Proposition. • $(AB)^t = B^t A^t$

- $(A.B).C = A.(B.C)$ (le produit de matrices est associative)
- $A.(B + C) = A.B + A.C$ (distributivité à gauche)
- $(B + C).A = B.A + C.A$ (distributivité à droite)
- $\alpha(A.B) = (\alpha A).B = A.(\alpha B)$
- Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $I_m.A = A.I_n = A$.

2.3.2 L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'addition et la multiplication matricelles sont des LCI, c'est dire des lois de Composition Internes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, l'addition et la multiplication de deux matrices carrées d'ordre n donnent des matrices carrées d'ordre n . D'après la proposition précédente, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'élément unité I_n .

Remarque. Soient A et B deux matrices. On peut avoir $A.B = 0_{m,n}$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. A et B sont alors appelées diviseurs de zéro dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Par conséquent, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre.

Exemple.

1- Pour $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculer AB

2.3.2.1 Element nilpotente de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou matrice carrée nilpotente

Définition. Une matrice carrée A est dite nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. k est appelé indice de nilpotence de la matrice A .

Exemple.

$$1- \text{ Pour } A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{calculer } A^3 \quad \text{et conclure.}$$

2.3.2.2 Element inversible de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou matrice carrée inversible

Définition. Une matrice carrée A , d'ordre n , est dite inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A.B = B.A = I_n$. Une telle matrice B est unique et appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} . L'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Si B est l'inverse de A , alors A est l'inverse de B .

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Proposition. Soient A et B deux matrices inversibles d'ordre n , on a alors :

- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.
- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^t \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Théorème. Soit A une matrice carrée d'ordre n . A est inversible si, et seulement si, $rg(A) = n$.

Remarque. Si A est une matrice carrée d'ordre n inversible, alors on peut déterminer l'inverse A^{-1} de A par différentes méthodes :

- **Méthode 1 :** En résolvant un système d'équations linéaires.

Exemple. Déterminer l'inverse de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On suppose que B est inversible et que :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

Par définition $BB^{-1} = I_2$ ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y & 2z + 3t \\ x + 2y & z + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'égalité de deux matrices, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 0 \\ 2z + 3t = 0 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $x = 2; y = -1; z = -3$ et $t = 2$. Et par conséquent,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application. En utilisant cette méthode, calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Méthode 2 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère deux vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{puis on pose : } AX = Y.$$

En supposant que A est inversible, on obtient :

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}Y \iff (A^{-1}A)X = A^{-1}Y \\ &\iff I_n X = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y. \end{aligned}$$

En effet, on part de l'écriture $AX = Y$ pour exprimer $x_1, \dots$ et x_n en fonction de $y_1, \dots$ et y_n pour déduire A^{-1} .

Exemple. Pour

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

utiliser cette méthode pour déterminer B^{-1} et M^{-1} .

- Méthode 3 : Méthode de Gauss-Jordan (*Gauss : allemand 1777-1855 ; Jordan : français 1838-1922*)

A partir de la disposition $A|I_n$, on utilise les mêmes opérations élémentaires sur les lignes (et/ou colonnes) de A et de I_n simultanément de manière à obtenir une disposition $I_n|B$. Alors $B = A^{-1}$.

Exemple. Pour

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

utiliser cette méthode pour déterminer B^{-1} et M^{-1} .

2.4 Déterminant d'une matrice carrée

La notion de déterminant est essentielle pour la résolution de systèmes d'équations linéaires. Dans ce paragraphe, nous présentons les règles de calcul et notamment les méthodes de développement (selon une ligne ou une colonne) valables pour des déterminants de taille quelconque.

La définition du déterminant fait appel aux notions de permutation et d'inversion. Soit S un ensemble de n éléments : $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

2.4.1 Définitions

Définition. Une permutation est une bijection de S dans lui-même.

Exemple. L'application σ de S dans lui-même, telle que $\sigma(i) = n - (i - 1)$ est une permutation sur S :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Il y'a $n!$ permutations différentes possibles sur un ensemble de n éléments distincts.

Définition. Soit une permutation σ sur l'ensemble S . Deux éléments i et j de S forment une inversion dans la permutation σ si et seulement si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Exemple. On considère la permutation σ de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dans lui-même telle que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 5$, $\sigma(5) = 6$ et $\sigma(6) = 4$. Cette permutation présente deux inversions. En effet, on a $4 < 6$ et $\sigma(4) = 5 > \sigma(6) = 4$ et $5 < 6$ et $\sigma(5) = 6 > \sigma(6) = 4$.

Définition. On considère A une matrice carrée d'ordre n de coefficients complexes a_{ij} , où i représente l'indice de ligne et j l'indice de colonne du coefficient. On appelle déterminant de A noté $\det(A)$ ou $|A|$, le nombre complexe défini par $\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} (-1)^k a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$, où σ est une permutation des nombres $1, 2, \dots, n$ et k représente le nombre d'inversion dans la permutation σ .

Exemple. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

et $n = 3$. Il y'a $3! = 6$ permutations, qui sont :

$$\left(\begin{array}{ll} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } k = 0 & \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } k = 1 \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } k = 1 & \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } k = 2 \\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } k = 2 & \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } k = 3 \end{array} \right).$$

k représente le nombre d'inversions de chaque permutation.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} \\ &\quad + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Cette méthode issue de la définition est peu praticable pour le calcul du déterminant d'une matrice donnée. L'exploitation de certaines de ses propriétés permet de déduire des méthodes de calcul praticables.

2.4.2 Cas des matrices carrées d'ordre $n \leq 3$

Définition. Soit $A = (a)$ une matrice carrée d'ordre un. Le déterminant de A est égal à son unique élément : $\det(A) = |a| = a$.

Exemple. Si $A = (3)$ alors $\det(A) = |3| = 3$; si $A = (-5i)$ alors $\det(A) = |-5i| = -5i$.

Définition. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre deux. Le déterminant de A est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2}i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & \sqrt{2}i \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3\sqrt{2}i$.

Définition (Méthode de SARRUS). Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. Le déterminant de A est :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Exercice d'application. En utilisant la méthode de SARRUS, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -i & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -7 \\ -5 & 1 & 2i \end{pmatrix}$$

Remarque. La règle de SARRUS ne s'applique qu'aux déterminants d'ordre trois.

2.4.3 Cas général : Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$ et A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne dans A . On appelle mineur de Laplace (ou simplement mineur de la place (i, j)) m_{ij} de A associé à (i, j) , le déterminant d'ordre $n - 1$ de la matrice A_{ij} .

On appelle cofacteur de Laplace (ou simplement cofacteur de la place (i, j)) c_{ij} de A associé à (i, j) , le scalaire $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, où m_{ij} est le mineur associé à (i, j) .

Exercice d'application. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer c_{13} , c_{23} , c_{41} .

Théorème. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$ et c_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ les cofacteurs de A associé à (i, j) . On a :

- i) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\det(A) = \sum_{j=1}^n c_{ij} a_{ij}$ (développement du déterminant suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne).
- ii) Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\det(A) = \sum_{i=1}^n c_{ij} a_{ij}$ (développement du déterminant suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne).

Exercice d'application. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -i & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -7 \\ -5 & 1 & 2i \end{pmatrix}.$$

Remarque. Très importante (aussi valable sur les lignes)

- i) Un déterminant ne change pas si on remplace une colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes.

- ii) Pour calculer un déterminant d'ordre $n \geq 3$, il est préférable de le développer suivant la colonne qui comporte le plus d'éléments nuls.
- iii) Quelle que soit la colonne fixée, la valeur du déterminant est la même.
- iv) Le déterminant est multiplié par -1 si on permute deux colonnes.

Exercice d'application. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.4.4 Propriétés des déterminants

Proposition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ A, B des matrices carrées d'ordre n .

- i) $\det(I_n) = 1$
- ii) $\det(A.B) = \det(A) \det(B)$
- iii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
- iv) $\det({}^t A) = \det(A)$
- v) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- vi) Si A est une matrice diagonale alors le déterminant de A est égal au produit des éléments de sa diagonaux.
- vii) Si A est une matrice triangulaire alors le déterminant de A est égal au produit des éléments de sa diagonaux.

2.5 Déterminant et inverse d'une matrice carrée

2.5.1 Méthode des cofacteurs

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle comatrice de A notée $\text{com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Théorème. Soit A une matrice carrée d'ordre n .

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ et l'inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A)$.

et la matrice $\overline{A} = (A \mid B)$ est appelée matrice augmentée ou élargie du système.

Considérons un système de n équations à p inconnues

et sa matrice augmentée

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{array} \right)$$

Nous supposons qu'il existe i tel que $a_{i1} \neq 0$. (sinon le système perd une variable)

Nous réorganisons les lignes de $\overline{A}$ de telle façon à "faire remonter" la ligne i en première ligne et nous ré-indexons les coefficients de manière normale. Cette manoeuvre donne évidemment un système équivalente avec $a_{11} \neq 0$.

On privilégie alors l'équation 1 et le coefficient a_{11} , qui sera le premier pivot.

La première étape consiste à éliminer les coefficients de l'inconnue x_1 dans les lignes 2, 3, ..., n par combinaison linéaire de chacune de ces lignes avec la première.

On obtient alors un système équivalent dont la matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2p} & b'_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{np} & b'_n \end{array} \right)$$

On répète ensuite le procédé pour éliminer les coefficients de x_2 dans les équations 3, 4, ..., n .

On réitère l'opération jusqu'à ce que la matrice du système soit triangulaire supérieure. On détermine alors les valeurs des inconnues en partant du bas vers le haut.

Exercice d'application. Résoudre les systèmes suivants :

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + z + 5t = -1 \\ 2x + 6y + 4z = 1 \\ x + y + 2z + 2t = 2 \\ -2x + 2y + 3z + 3t = 3 \end{array} \right. , b) \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 4z + 2t = 1 \\ 2x + y + z + 4t = -2 \\ -x - 2y + z - 2t = 3 \end{array} \right.$$

$$, c) \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 5 \\ -4x - 18y + 13z = -10 \\ -3x - 21y + 15z = -9 \end{array} \right.$$